Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
CO3121 Probabilidad para Ingenieros
Preparaduría Semana 8.

1.(4.39) El tiempo que tardan en ir y volver unos camiones que transportan concreto a un lugar donde se construye una autopista está distribuido uniformemente en el intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de viaje redondo rebase los 65 minutos si se sabe que hacerlo toma más de 55 minutos?

Sea y el tiempo de viaje.

$$P(y > 65|y > 55) = \frac{P(y > 65 \cap y > 55)}{P(y > 55)} = \frac{P(y > 65)}{P(y > 55)}$$

$$P(y > 65) = \int_{65}^{70} \frac{1}{70 - 50} dy = \frac{70 - 65}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(y > 55) = \int_{55}^{70} \frac{1}{20} dy = \frac{70 - 55}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$P(y > 65|y > 55) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{P(y > 65|y > 55) = \frac{1}{3}}$$

2.(4,54) Los promedios de calificaciones de una gran población de estudiantes universitarios tienen aproximadamente una distribución normal con una media de 2.4 y desviación estándar de 0.8.

a. ¿Qué fracción de alumnos obtendrá un promedio superior a 3.0?

Sea y la calificación.

$$P(y > 3) = P\left(z > \frac{3 - 2.4}{0.8}\right) = P(z > 0.75) = 0{,}2266 \rightarrow \boxed{P(y > 3) = 0{,}2266}$$

b. Si los estudiantes que obtienen un promedio de calificaciones inferior a 1.9 son expulsados de la universidad, ¿Qué porcentaje de ellos será expulsado?

$$P(y < 1.9) = P\left(z < \frac{1.9 - 2.4}{0.8}\right) = P(z < -0.625) = P(z > 0.625) = \frac{0{,}2676 - 0{,}2643}{2} = 0{,}26595$$

$$\rightarrow \boxed{P(y < 1.9) = 0{,}26595}$$

c. Supongamos que se eligen tres estudiantes aleatoriamente de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos obtengan un promedio de calificación superior a 3.0?

$$P(y > 3) \times P(y > 3) \times P(y > 3) = (0{,}2266)^3 = 0{,}0116.$$

3.(4.69) La magnitud de los terremotos registrados en una región de Estados Unidos puede representarse mediante una distribución exponencial con media 2.4, de acuerdo con la escala de Richter. Calcule la probabilidad de que un terremoto que azote a la región

a. Rebase los 3.0 grados de Richter.

Sea y: escala del terremoto.

$$P(y > 3.0) = \int_{3}^{\infty} \frac{1}{2.4}\, e^{-y/2.4}\, dy = e^{-3/2.4} = 0{,}2865 \;\rightarrow\; \boxed{P(y > 3.0) = 0{,}2865}$$

b. Esté entre los 2.0 y 3.0 grados en la escala de Richter.

$$P(2.0 < y < 3.0) = \int_{2}^{3} \frac{1}{2.4} e^{-y/2.4}\, dy = -e^{-3/2.4} + e^{-2/2.4} = 0{,}1481$$
$$\rightarrow \boxed{P(2.0 < y < 3.0) = 0{,}1481}$$

c. De los siguientes 10 terremotos que azoten a la región, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno rebase los 5.0 grados en la escala de Richter?

$$P(y > 5.0) = \int_{5}^{\infty} \frac{1}{2.4} e^{-y/2.4}\, dy = e^{-5/2.4} = 0{,}1245 \;\rightarrow\; \boxed{P(y > 5.0) = 0{,}1245}$$

En esta parte del problema se aplica la regla de pérdida de memoria.

4.(4.58) Un método para hacer un pronóstico económico consiste en llegar al consenso. Se selecciona un pronóstico de cada uno de una gran cantidad de analistas, y el promedio de los pronósticos individuales es el pronóstico general. Suponga que los pronósticos individuales de los economistas respecto a las principales tasas de interés de enero de 1996 se aproximan a una distribución normal con una media de 7% y una desviación estándar de 2.6%. Si se elige aleatoriamente un analista de este grupo, encuentre la probabilidad de que su pronóstico sobre la principal tasa de interés

a. Exceda el 11%.

Sea y: tasa de interés.

$$P(y > 11) = P\left(z > \frac{11 - 7}{2.6}\right) = P(z > 1.54) = 0{,}0618 \;\rightarrow\; \boxed{P(y > 11) = 0{,}0618}$$

b. Sea inferior al 9%.

$$P(y < 9) = P\left(z < \frac{9 - 7}{2.6}\right) = P(z < 0.77) = 1 - P(z > 0.77) = 1 - 0{,}2206 = 0{,}7794$$
$$\rightarrow \boxed{P(y < 9) = 0{,}7794}$$

5.(4.73) Se descubrió que los tiempos entre un accidente y otro en los vuelos nacionales de Estados Unidos programados durante los años 1948 y 1961 tienen una distribución aproximadamente exponencial con una media de 44 días.

a. Si uno de los accidentes ocurrió el primero de Julio de un año elegido aleatoriamente en el periodo de estudio, ¿Cuál es la probabilidad de que ocurriera otro accidente el mismo mes?

Sea y: tiempo entre accidentes aéreos.

$$P(y < 31) = \int_0^{31} \frac{1}{44} e^{-y/44}\, dy = -e^{-31/44} + e^{0/44} = 0{,}5057 \;\rightarrow\; \boxed{P(y < 31) = 0{,}5057}$$

b. ¿Cuál es la varianza del tiempo entre accidentes para los años indicados?

$$Var(y) = \beta^2 = (44)^2 = 1936 \;\rightarrow\; \boxed{Var(y) = 1936}$$

6.(4.59) La longitud de los bloques de un edificio tiene una distribución normal con una media de 950mm y una desviación estándar de 10mm.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un bloque elegido aleatoriamente tenga una longitud entre 947 y 958mm?

Sea y: longitud del bloque.

$$P(947 < y < 958) = P\left(\frac{947 - 950}{10} < z < \frac{958 - 950}{10}\right) = P(-0.3 < z < 0.8) = 1 - \Phi(0.8) - \Phi(0.3)$$
$$= 1 - 0{,}2119 - 0{,}3821 = 0{,}406 \;\rightarrow\; \boxed{P(947 < y < 958) = 0{,}406}$$

b. ¿Qué valor es adecuado para c, de tal manera que un bloque elegido aleatoriamente tenga una longitud menor que c con una probabilidad de 0,8531?

$$P(y < c) = P\left(z < \frac{c - 950}{10}\right) = 0{,}8531 \;\rightarrow\; P\left(z > \frac{c - 950}{10}\right) = 1 - 0{,}8531$$
$$\rightarrow\; P\left(z > \frac{c - 950}{10}\right) = 0{,}1469 \;\rightarrow\; \frac{c - 950}{10} = 1.05 \;\rightarrow\; \boxed{c = 960{,}5}$$

7.(4.87) Los tiempos semanales que una máquina industrial se detiene por averías Y (en horas) tienen aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Las pérdidas L (en dólares) para la industria, como consecuencia de estos periodos de inactividad, están dadas por la expresión $L = 30Y + 2Y^2$. Calcule el valor esperado y la varianza de L.

$$E(L) = \int_{-\infty}^{\infty} (30Y + 2Y^2)\, f(y) dy = \int_0^{\infty} (30Y + 2Y^2) \left(\frac{y^{\alpha - 1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha\, \Gamma(\alpha)} \right) dy$$

$$= \frac{30}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y/\beta}\ dy + \frac{2}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y/\beta}\ dy$$

$$= \frac{30}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \left(\beta^{\alpha+1}\ \Gamma(\alpha+1)\right) + \frac{2}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \left(\beta^{\alpha+2}\ \Gamma(\alpha+2)\right)$$

$$= \frac{30\ \beta^\alpha\ \beta\ \alpha\ \Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} + \frac{2\ \beta^\alpha\ \beta^2\ (\alpha+1)\ \alpha\ \Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} = 30\beta\alpha + 2\beta^2(\alpha+1)\alpha = 276\ \rightarrow\ \boxed{E(L) = 276}$$

$Var(L) = E(L^2) - \left(E(L)\right)^2.$

$$E(L^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (30y + 2y^2)^2\ f(y)\ dy = \int_0^\infty (900y^2 + 120y^3 + 4y^4) \left(\frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)}\right) dy$$

$$= \frac{900}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y/\beta} dy + \frac{120}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+2} e^{-y/\beta} dy + \frac{4}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+3} e^{-y/\beta} dy$$

$$= \frac{900}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \left(\beta^{\alpha+2}\ \Gamma(\alpha+2)\right) + \frac{120}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \left(\beta^{\alpha+3}\ \Gamma(\alpha+3)\right) + \frac{4}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} \left(\beta^{\alpha+4}\ \Gamma(\alpha+4)\right)$$

$$= \frac{900\ \beta^\alpha\ \beta^2\ (\alpha+1)\ \alpha\ \Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} + \frac{120\ \beta^\alpha\ \beta^3\ (\alpha+2)\ (\alpha+1)\ \alpha\ \Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)} + \frac{4\ \beta^\alpha\ \beta^4\ (\alpha+3)\ (\alpha+2)\ (\alpha+1)\ \alpha\ \Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha\ \Gamma(\alpha)}$$

$$= 900\beta^2(\alpha+1)\alpha + 120\beta^3(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha + 4\beta^4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha = 123840.$$

$$\rightarrow\ Var(L) = 123840 - (276)^2 = 47664\ \rightarrow\ \boxed{Var(L) = 47664}$$

8.(4.74) Las concentraciones de monóxido de carbono, en un periodo de una hora, en muestras de aire de una gran ciudad tienen aproximadamente una distribución exponencial con una media de 3.6 partes por millón.

a. Calcule la probabilidad de que la concentración de monóxido de carbono exceda 9 partes por millón en un periodo de una hora.

Sea y: concentración de monóxido de carbono

$$P(y > 9) = \int_9^\infty \frac{1}{3.6} e^{-y/3.6} dy = e^{-9/3.6} = 0{,}0821\ \rightarrow\ \boxed{P(y > 9) = 0{,}0821}$$

b. Un plan para controlar el tráfico redujo la media a 2.5 partes por millón. Ahora encuentre la probabilidad de que la concentración sea superior a 9 partes por millón.

$$P(y > 9) = \int_9^\infty \frac{1}{2.5} e^{-y/2.5} dy = e^{-9/2.5} = 0{,}0273\ \rightarrow\ \boxed{P(y > 9) = 0{,}0273}$$

9. Distribución Beta.
Función de densidad:

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \qquad 0 \leq y \leq 1$$

Donde

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

<u>Teorema.</u> Sea Y de distribución Beta (α,β). Entonces, su media y varianza son:

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad Var(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Demuestre la ecuación de la varianza.

$$Var(y) = E(y^2) - \big(E(y)\big)^2.$$

$$E(y^2) = \int_0^1 y^2\left(\frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\right)dy = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 y^{\alpha+1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \times \frac{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{(\alpha+1)\,\alpha\,\Gamma(\alpha)}{(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta)}$$

$$Var(y) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\alpha^2(\alpha+\beta) + \alpha(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta) - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$\rightarrow \boxed{Var(y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}}$$